決闘のゲーム理論 (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

寺岡, 義伸

数理解析研究所講究録
第1802巻2012年172-178

決闘のゲーム理論

近畿大学・経営学部　寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）
Faculty of Business Administration
Kinki University

1．緒　言

決闘のゲーム理論は、銃を持った２人の決闘者が互いに自分と相手の射撃の技量を考えながら、どの時点で発射すれば最適となるかで表現されるクラスの問題であり、ゲーム理論で扱うモデルの中でも最も対立的状況を鮮明に表現したモデルであろう。このゲームは最適なタイミングを考える問題である。また、ゲーム理論の数学的側面から、決闘の問題を眺めると、２人の行動主体（プレーヤ）が連続体の濃度の純戦略を持つゲームの、代表的な応用例となっている。

決闘ゲームの初期における貢献は1950年代のDresher, Karlin, Restrepo によって代表される。その後今日に至るまでBlackwell, Danskin, Kimeldorf, Fox, Lang, Smith, Sweat, Yanovskaya, Styszynski, Radzig, Owrowski, Teraoka, Kurisu, Troylor 等による貢献が続き、益々多彩な内容となって今日まで研究対象となっている。

2、出発点となったモデル

決闘ゲームは以下のような例で表現すると、問題点がはっきりする。

２人の決闘者（Duelists）、Player I と PlayerⅡ、が距離２だけおいて向き合って立ち、２人とも単位速度で近寄る。立ち止まったり後退したりは出来ない。従って２人は時刻 t=0 に出発して互いに歩み寄り、もし途中で障害がなければ時刻 t=1 で出会う。２人は手に銃を持っており、射撃の精度は精度関数（accuracy function）:

$A_i(t)$ ＝Player i が時刻 t において発砲するとき、相手に当たる確率

で表される。この関数は $A_i(0)=0,\ A_i(1)=1,\ A_i'(t)$ が 存在して $A_i'(t) > 0$ for $t \in [0,1]$ であると仮定する（$i=1,2$）。

このような状況にあっては、両決闘者共なるべく発砲時刻を遅らせたい。しかし遅すぎると、相手が先に発砲してやられてしまうかも知れない。相手を仕留める確率と相手から仕留められるかを考えた上で、自分にとっての最適な発砲時刻を決定するのがこの問題の目的である。

ここで、プレーヤにとっても利得を、相手を倒せば+１、倒されればー１、その他の場合は0と、すなわち０和と、仮定する。この仮定は、自分が生き残る確率を最大にしようとする仮定と同じ内容を与える。

ところで、この種のゲームにおいては、プレーヤにとって利用できる情報について、次のような特徴的な型が考えられる。一方の決闘者が発砲したとき、瞬間にその音が相手に聞こえるとき、すなわち、一方のプレーヤが行動を取ったとき、そのことが瞬間に情報として相手プレーヤに伝

えられるとき、彼は noisy bullet を持っていると言う。反対に、銃に消音装置がついていて、その銃を持っている決闘者が発砲してもそのことが相手に知られない、すなわちそのプレーヤの情報防護がしっかりしていて、彼が既に行動とったのか、未だ行動していないかの情報が相手プレーヤに伝えられないとき、彼は silent bullet を持っていると言う。決闘ゲームにおいて silent bullet と noisy duel の間に本質的な違いがあることを指摘したのは Blackwell である[1]。

<u>Noisy Duel</u>　この場合、両者とも互いに、相手が先に発射して成功すれば自分はそれまでである。もし相手が失敗すれば、そのことを情報として知ることができるので、その時刻より後で最も有利となる時刻 $t=1$ まで発射をひかえ、$t=1$ のときには確実に相手をしとめることができる。従って、Player I の純戦略は $x\in[0,1]$ であり、この意味は、I は予め点 $x\in[0,1]$ を決めておき、もし II が時刻 $y<x$ で発射して失敗すれば点1で発射し、II が x より前に発射しなければ点 x で発射する、という計画を立てることである。Player I が得ることが出来る期待利得 $M(x,y)$ は

$$(1)\qquad M(x,y)=\begin{cases}2A_1(x)-1, & x<y\\ A_1(x)-A_2(y), & x=y\\ 1-2A_2(y), & y<x\end{cases}.$$

定理1．　方程式 $A_1(t)+A_2(t)=1$ の区間 $[0,1]$ における唯一根を t_0 とする。そうすると t_0 の、組 (t_0,t_0) は（1）で与えられる２人０和ゲームの鞍点となる。

<u>Silent Duel</u> 次に、両決闘者とも silent bullet を持っている場合を考察しよう。この場合両者とも $[0,1]$ の各時点において、互いにお相手が未だ発砲していないのか、既に発砲してしまった後なのかが、判らないのであるから、Player I と II の純戦略を、単純に、ぞれぞれの発射時刻 $x\in[0,1]$、$y\in[0,1]$ と 設定するのが自然である。そうすると、Player I への期待利得 $M(x,y)$ は

$$(2)\qquad M(x,y)=\begin{cases}A_1(x)-A_2(y)+A_1(x)A_2(y), & x<y\\ A_1(x)-A_2(y), & x=y\\ A_1(x)-A_2(y)-A_1(x)A_2(y), & x>y\end{cases}$$

となる。この利得関数を持つ２人０和ゲームにおいては、定理１のような純戦略の中で最適戦略、すなわち鞍点は存在しない。

定理2． a_1,a_2 をそれぞれ、方程式

$$1+\frac{1}{A_2(a)}=\int_a^1\frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}dt \quad ; \quad 1+\frac{1}{A_1(a)}=\int_a^1\frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt$$

の 区間 $(0,1)$ 内における唯１つの根とし、$a=\max(a_1,a_2)$ と置く。そうすると Player I の最適混合戦略 $F^0(x)$ と Player II の最適混合戦略 $G^0(y)$ は次のように与えられる。

$$F^0(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<a\\ \int_a^x\frac{k_1A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}dt+\alpha I_1(x), & a\le x\le 1\end{cases}\quad ;$$

$$G^0(y)=\begin{cases}0, & 0\le x<a\\ \int_a^y \frac{k_2A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt+\beta I_1(y), & a\ \le x\le 1\end{cases}.$$

ここに、$I_1(z)$ は点 $z=1$ における unit-step function であり、α と β は

$$\alpha\begin{Bmatrix}=\\=\\>\end{Bmatrix}0,\qquad \beta\begin{Bmatrix}>\\=\\=\end{Bmatrix}0\qquad if\quad a=\begin{Bmatrix}a_1>a_2\\a_1=a_2\\a_2>a_1\end{Bmatrix}$$

で与えられる。また、k_1 と k_2 はそれぞれ α と β を含めて

$$\frac{1}{k_1}=\left\{1+\frac{1}{A_2(a)}\right\}/(1+\alpha)=\int_a^1\frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}dt/(1-\alpha)\quad ;$$

$$\frac{1}{k_{21}}=\left\{1+\frac{1}{A_1(a)}\right\}/(1+\beta)=\int_a^1\frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt/(1-\beta)$$

により計算できる。この時、ゲームの値 v^0 は

$$v^0=\begin{cases}\{1-3A_2(a)\}/A_2(a)\int_a^1\frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}, \\ -\{1-3A_1(a)\}/A_1(a)\int_a^1\frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt,\end{cases}\qquad if\quad a=\begin{Bmatrix}a_1\\ \\a_2\end{Bmatrix}$$

となる。

<u>**Silent-Noisy Duel**</u>　ここでは、Player I は silent bullet を持っており、Player II は noisy bullet を持っているところの情報構造において非対称となる場合を考える。この２人０和ゲームに対しては、随分長い間、最も簡単な $A_1(t)=A_2(t)=t$ の場合のみが解かれただけだった。(

$$(3)\qquad M(x,y)=\begin{cases}x-y+xy, & x<y\\ x-y, & x=y\\ 1-2y, & x>y\end{cases}$$

定理３．$a=\sqrt{6}-2$ $(\cong 0.45)$ とおく。そうすると、上記の利得関数 (3) に対して、Player I の最適戦略は確率密度関数

$$f^*(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<a\\ \sqrt{2}a(x^2+2x-1)^{-3/2}, & a<x<1\end{cases}$$

で与えられ、Player II の最適戦略は累積分布関数

$$G^*(y)=\frac{a}{2+a}\left\{\frac{2}{a}\int_0^y f^*(t)dt+I_1(y)\right\}$$

で表される。このゲームに対してのゲームの値は $v^*=1-2a=5-\sqrt{6}$ ($\cong 0.101$)。

3. 弾丸の数や精度関数の一般化

前節で紹介した決闘ゲームの自然な拡張は、弾丸の数や精度関数の一般化であろう。

<u>Silent Duel の一般化</u> Restrepo は、1957 年、両決闘者とも silent bullets を所有しており、Player I は m 発の弾丸を持ち、II は n 発の弾丸を持ったモデルを提案し、一般精度関数に対して、その解を漸化的な形で導いた。 Restrepo のモデルを紹介する。

Player I の純戦略を $\boldsymbol{x}=(x_1,---,x_m)$ とし、 Player II の純戦略を $\boldsymbol{y}=(y_1,---,y_n)$、ただし $x_1\le---\le x_m$, $y_1\le---\le y_n$、とする。

そうすると I への期待利得 $M(x_1,---,x_m\,;y_1,---,y_n)$ は

$$M(x_1,---,x_m\,;y_1,---,y_n)$$
$$=\begin{cases}A_1(x_1)+\{1-A_1(x_1)\}M(x_2,---,x_m;y_1,---,y_n), & x_1<y_1\\ -A_2(y_1)+\{1-A_2(y_1)\}M(x_1,---,x_m;y_2,---,y_n), & x_1>y_1\end{cases},$$

ただし $x_1=y_1$ の時は、上記の関係式右辺の上下 2 つの項の平均とする。

で与えられる。そうして Player I , II の混合戦略をそれぞれ $\boldsymbol{F(x)}$, $\boldsymbol{G(y)}$ で表し、次のように想定する：

$$\boldsymbol{F(x)}=\prod_{i=1}^{m}F_i(x_i)\quad;\quad \boldsymbol{G(y)}=\prod_{j=1}^{n}G_j(y_j)$$

ただし、$F_i(x_i)$ は 区間 $[a_i,a_{i+1}]$上の cdf であり、$i<m$ に対しては pdf $f_i(x_i)$ のみで、$i=m$ に対しては $[a_m,a_{m+1})$上の density part $f_m(x_m)$ と点 a_{m+1} での可能な mass $\alpha\ge 0$ とで構成される。

同様に $G_j(y_j)$ は区間 $[b_j,b_{j+1}]$ 上の cdf であり、$j<n$ に対しては$[b_j,b_{j+1})$ 上の pdf $g_j(y_j)$ のみで、$j=n$ に対しては $[b_n,b_{n+1})$上の density part $g_n(y_n)$ と点 b_{n+1} での可能な mass $\beta\ge 0$ とで構成される。ここに、 $0<a_1<a_2<---<a_m=1$; $0<b_1<b_2<---<b_n=1$ であり、さらに $a_{m+1}=b_{n+1}=1$ とする。

Restrepo は上記のようなクラスの混合戦略の中から、Sinble-bullet のモデルで得られた最適混合戦略と相似な cdf を各 $F_i(x_i)$ や $G_j(y_j)$ に条件を満たすように当てはめて、つなぎあわせることで、最適戦略を導く漸化関係式を与えた。そこでは、動的計画法の考え方が使われている。

<u>Noisy Duel の一般化</u> Silent duels に比べて noisy duel の一般化—プレーヤ I は m 発弾丸を持ち、II は n 発弾丸を持ち、精度関数は一般の場合—は格段に難しい。 それは silent duel においては、両決闘者とも、相手の行動が情報として知らされないため、各プレーヤの発射時刻の設定は[0,1]のどに時点においても安定しており（修正するためのデータが得られない）、これに伴い、

純戦略ならびに混合戦略の設定も同じ形式の繰り返しで表現できる単純な設定ですんだ。これに比べて noisy duel にあっては、両プレーヤとも自分がやられていない限り、自分と相手の残っている弾丸の数が常に学習できるため、これに応じて発射時刻の変更を組み込んだ形式の純戦略および混合戦略を設定しなければならない。このため Karlin の書物では、両者とも一発ずつ弾丸を持ち精度関数は一般の場合か、I は m 発の弾丸を持ちⅡは n 発を持っているが精度関数は等しい、すなわち $A_1(t)=A_i(t)=t$ の場合だけが紹介されており、その後 10 年間、何ら新しい報告は無かった。しかし、1969 年ついに Fox and Kimeldorf は、純戦略の系列とゲームの値の系列に動的計画的考え方を導入し、ε-optimal の意味での完全な解決を与えた。

Player I は m 発 noisy bullets を、Ⅱは n 発 noisy bullets を持っているとする。そこで、このゲームを G_{mn} とおくと、$G_{m,n-1}$ と $G_{m-1,n}$ の解が求まると再帰的関係により G_{mn} が解ける。したがって次の結果を得る。

適当な $\{t_{ij};\ i,j=1,2,---\}$ と唯一つの $\{v_{il};\ i,j=1,2,---\}$ が 存在して

$$v_{ij}=A_1(t_{ij})+\{1-A_1(t_{ij})\}v_{i-1,j}$$

$$=-A_2(t_{ij})+\{1-A_{ij}(t_{ij})\}v_{i,j-1}\quad ,$$

ここに、$v_{i0}=1 \quad for\ i>0$ and $v_{0j}=-1 \quad for\ j>0$.

が成立する。これより任意の m,n に対してゲーム G_{mn} は値 v_{mn} を持つ。

また、時刻 $\{t_{ij}\}$ は

$$\prod_{i=1}^{m}\{1-A_1(t_{im})\}+\prod_{j=1}^{n}\{1-A_2(t_{mj})\}=1$$

より順次決定される。すなわち、もし両決闘者がともに最適に振舞うならば、G_{mn} における最初の発射時刻は t_{mn} とすべきであり、さらに

$$A_1(t_{mn})-A_2(t_{mn})+[1-A_1(t_{mn})][1-A_2(t_{mn})]v_{m-1,n-1}\begin{Bmatrix}\geq\\ \leq\end{Bmatrix}v_{mn}\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix}Player\ \mathrm{I}\\ Player\ \mathrm{II}\end{Bmatrix}\text{ が発射}$$

することとなる。

Silent-Noisy Duel の一般化　前節でも解説したように、両プレーヤとも弾丸を一発ずつ所有しており、精度関数が一般のゲームへの拡張は、そんなに簡単でなく、さらにモデルを複雑にした 1974 年の Styszynski[10]ならびに 1981 年の Teraoka[16]のモデルからの帰結を待たなければならなかった。次に、その結果を示す。

下記のような利得関数を持つ２人０和ゲームを考える：

$$M(x,y)=\begin{cases} A_1(x)-A_2(y)+A_1(x)A_2(y), & x<y \\ A_1(x)-A_2(y), & x=y \\ 1-2A_2(y), & x>y \end{cases} .$$

定理 4.　いま、t_0を方程式$A_1(t)A_2(t)+A_1(t)+A_2(t)=1$の区間 [0,1] における唯一根とし、$h_i(t)$を

$$h_i(t)=A'_{3-i}/\{A_1(t)A_2(t)+A_1(t)+A_2(t)-1\} \quad for\ t\in(t_0,1), \qquad i=1,2$$

とする。そこで、aを方程式

$$\int_a^1 h_1(t)\exp[-\int_a^t\{1+A_1(s)\}h_1(s)ds]dt=1/2$$

の区間（t_0,1）における唯一根とする。そうすると、上記の２人０和ゲームに対して、Player I の最適混合戦略$F^*(x)$と PlayerⅡの最適混合戦略$G^*(y)$は以下のように与えられる。

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<a \\ 2\int_a^x h_1(t)\exp[-\int_a^t\{1+A_1(s)\}h_1(s)ds]dt, & a\le x\le 1 \end{cases} ;$$

$$G^*(y)=\begin{cases} 0, & 0\le y<a \\ \beta(2\int_a^y h_2(t)\exp[+\int_a^t\{1+A_2(s)\}h_2(s)ds]dt+I_1(y)), & a\le y\le 1 \end{cases} ,$$

ここに$I_1(y)$は$y=1$ における unit-step function であり、mass part β は

$$\beta=1/(1+2\int_a^1 h_2(t)\exp[+\int_a^t\{1+A_2(s)\}h_2(s)ds]dt\ )>0.$$

従って、対応するゲームの値 v^* は $v^*=1-2A_2(a)$ となる。

この結果によると、点１に mass part を残すプレーヤは両決闘者の精度関数が何であっても PlayerⅡ、すなわち、noisy player のみである。これは Player I （silent player）の純戦略には相手が（自分の予定時刻より前に）発射したことがわかれば点１まで待つ計画が、一般精度関数にまで拡張しても、影響をもつことを意味する。そして $G^*(y)$の形を眺めると density part の係数に mass part βが入っている。このため、定理２の証明と同じ方法では、上手く分布関数の条件を満たすようなaとβを定めることが出来ないからである。Styszynski は m-silent 対 1-noisy の解が案外に容易に求まることを見つけ、その特別な場合として本質的に定理３とよく似た結果を示唆した。Teraoka は両決闘者が所有する弾丸の数が２変量ベルヌーイ分布に従う確率変数であるモデルを提案して解を求め、その際、両者が弾丸を所有する確率が共に１へ近づけたときの極限として定理４を導いた。この silent-noisy duel の一般化は、大きく未開拓であり、現在でも open となっている。特別な問題に対して、Owlowski, Radzig, Kurisu, Troylor 等の研究者が地道な、しかし興味ある結果を出しているが、省略する。。

弾丸の数の一般化は、その極限として連続時刻での発砲へのモデル化を生むが、今回はこれも省略する。

参考文献

[1] Baston and Gernaev, A. "Teraoka type silent non-zero sum game" *Journal of Optimization Theory and Applications*

[2] Blackwell, D., and Gershik, A: *Theory of Games and Statistical Decisions,* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954.

[3] Dresher, R.: *Games of Strategy,* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliff, New York, 1961.

[4] Fox, M., and Kimeldorf; G. :"Noisy duels", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17 353-361. 1969.

[5] Karlin, S.: *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics,* Vol. II, Addison-Weslay, Massachusetts, 1959.

[6] Lang, J. R. and Kimeldorf, G.: "Duels with continuous firing", Management Sciences 22, 470-476, 1975.

[7] Lang, J. R. and Kimeldorf, G.: "Silent duels with nondiscrete firing", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 31, 99-110, 1976.

[8] Restrepo, R., "Tactical problems involving several actions", *Contributions to the Theory of Games,* III (*Annals of Mathematics Studies* 39), 313-335, 1957.

[9] Styszynski, A., "An n-silent-vs.-noisy duel with arbitrary accuracy functions", *Zastosowania Matematyki* 14, 205-225, 1974.

[10] Sweat, C. W. "A single-shot noisy duel with detection uncertainty", *Operations Research* 19, 170-181, 1972.

[11] Teraoka, Y. "Silent duel with uncertain existence on the shot" *Report of Himeji Institute on Technology* 28, 1-8, 1975.

[12] Teraoka, Y. "Noisy duel with uncertain existence on the shot" *International Journal of Game Theory* 5, 239-249, 1976.

[13] Teraoka, Y. "A single bullet duel with uncertain information available to the duelists" *Bulletin of Mathematical Statistics* 18, 69-83, 1979.

[14] Teraoka, Y. "Silent-noisy duel with uncertain existence on the shot" *Bulletin of Mathematical Statistics* 19, 1981.

[15] Teraoka, Y. "A two person games of timing with random termination" *Journal of Optimization Theory and Applications*

[16] Teraoka, Y. "A silent-noisy duel with random termination " *Journal of Optimization Theory and Applications*

[17] Yanovskaya, Y. B., "Duel-type games with continuous firing", *Engineering Cybernetics* 7, 15-18, 1969.